Construction de l'exponentielle

Nils Laurent

1 Existence et unicité

1.1 Cauchy Lipschitz

Soit $F : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}$.

On suppose F localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable; soit $U \subset \Omega$ ouvert:

$$\exists k > 0, \forall x \in I, \forall y, y' \in U, |F(x,y) - F(x,y')| \leq k|y - y'| \tag{1}$$

Soit le problème:

$$(P) : \begin{cases} y'(x) = F(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0,\ (x_0, y_0) \in I \times \Omega \end{cases}$$

alors, y est l'unique solution maximale de (P). Son intervalle de définition est ouvert.

- Si $x \mapsto F(x, y(x))$ est de classe C^p, alors y est de classe C^{p+1}.
- Si F est k-lipschitzienne sur Ω, alors y est une solution globale de (P).

1.2 Définition de l'exponentielle

On pose $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y$. On déduit:

- F est 1-lipschitzienne en y sur $\mathbb{R}$ donc la solution est globale sur $\mathbb{R}$;
- $F : x \mapsto F(x, y(x)) \in C^\infty(\mathbb{R}) \implies y \in C^\infty(\mathbb{R})$.

On définit la fonction exponentielle comme la solution à ce problème. On note cette solution e^x.

2 Positivité

2.1 L'exponentielle est non nulle

La fonction $z(x_0) = 0$ est l'unique solution à l'ensemble des problèmes de cauchy où $y(t_0) = 0$. D'après Cauchy-Lipschitz, $e^0 \neq z(0) \implies e^x \neq z(x)$ et $e^x \neq z(x) \implies \forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0$.

2.2 L'exponentielle est strictement positive

Comme e^x est continue et ne s'annule pas, elle est de signe constant. De plus $e^0 = 1 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.

3 Opérations sur l'exponentielle

3.1 Produit d'exponentielles

Soient $x \in \mathbb{R}, y \neq 0$,

$$\frac{d}{dx}\frac{e^{x+y}}{e^y} = \frac{e^{x+y}}{e^y} \tag{2}$$

$$(x \mapsto \frac{e^{x+y}}{e^y})(0) = 1 \tag{3}$$

D'après Cauchy-Lipschitz, $\frac{e^{x+y}}{e^y} = e^x$ donc $e^{x+y} = e^x e^y$.

3.2 Puissance d'une exponentielle

Soit $\alpha > 0$, on pose,

$$f(x) = e^{x(1-\alpha)}(e^x)^\alpha \tag{4}$$

On remarque que $f(0) = 1$ et de plus,

$$f'(x) = (1-\alpha)f(x) + \alpha f(x) = f(x) \tag{5}$$

Toujours en utilisant Cauchy-Lipschitz, $e^{-\alpha}(e^x)^\alpha = 1$, donc $(e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$.

4 Bijection avec les réels positifs

La fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante et positive.

- En $-\infty$, la limite est donc finie, on en déduit $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.
- Comme à partir de 0, $\frac{d}{dx}e^x > \frac{d}{dx}x$, on en déduit $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

C'est est en bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$, d'inverse $x \mapsto \ln(x)$.

4.1 Réciproque continue

La fonction exponentielle est strictement monotone et réalise une bijection entre deux intervalles ouverts. D'après le théorème des fonctions réciproques, son inverse noté $x \mapsto \ln x$ est donc continue.

5 Croissance comparée des fonction exponentielle et logarithme

Il existe des formes indéterminées qui ne peuvent pas être levées avec un développement de Taylor-Young. C'est le cas quand on étudie la limite d'une fonction au bords de son domaine de définition. Cependant, la croissance des fonctions peut parfois être une information suffisante pour calculer la limite.

5.1 Croissance comparée de la fonction exponentielle

Proposition Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 0$, alors $e^x > x$

Démonstration On pose $f(x) = e^x - x$.

$$f(0) > 0 \text{ et } \forall x > 0, f'(x) > 0$$

Donc,

$$\forall x > 0, f(x) > 0$$

D'où $e^x > x$.

Proposition

1. La croissance de e^x est plus forte que x en ∞:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$$
2. La décroissance de e^{-x} est plus forte que x en ∞:
$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$$

Démonstration Soit $a \in]0,1[$, par croissance de la limite,

$$\forall x > 0, \frac{e^x}{e^{ax}} = e^{x(1-a)} < \frac{e^x}{ax} \implies \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{ax} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$$

De manière analogue,

$$\forall x > 0, -e^{ax}e^{-x} \leq -axe^{-x} \implies 0 \leq \lim_{x\to\infty} -axe^{-x}$$

On en déduit,

$$\forall x > 0, -axe^{-x} < 0 \implies \lim_{x\to\infty} -xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$$

Proposition Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, alors:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{bx}}{x^a} = \infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\infty} |x|^a e^{-bx} = 0$$

Démonstration Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, en posant $u = \frac{bx}{a}$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{bx}}{x^a} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^{\frac{b}{a}x}}{x}\right)^a = \lim_{u\to\infty} \left(\frac{e^u}{\frac{a}{b}u}\right)^a = \infty$$

De même,

$$\lim_{x\to\infty} |x|^a e^{-bx} = \lim_{x\to\infty} \left(|x|e^{-\frac{b}{a}x}\right)^a = \lim_{u\to\infty} \left(\frac{a}{b}|u|e^{-u}\right)^a = 0$$

5.2 Changement de variable dans des limites

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Proposition Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $f \in C^0(]a, b[)$ strictement monotone sur $]a, b[$, alors:

$$\forall c \in [a, b], \exists L \in \overline{\mathbb{R}}, \lim_{x\to c} f(x) = L$$

De plus, la fonction f est inversible. On pose g l'inverse de f et on a,

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{t\to L} f(g(t)) = L$$

Démonstration L'image d'un intervalle par une foncion continue est un intervalle. Donc d'après le théorème des fonctions réciproques, comme f est strictement monotone, f est un homéomorphisme (une bijection continue d'inverse continue).

5.3 Croissance comparée du logarithme à partir de l'exponentielle

La fonction e^x est $C^\infty(\mathbb{R})$ (donc continue) et est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ donc il en est de même pour sa réciproque sur $\mathbb{R}_+^*$. Il est ainsi possible d'utiliser la proposition 5.2 pour calculer les limites suivantes:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$
2. $\lim_{x\to 0} x \ln x$

Solutions D'après proposition 5.2 pour $f(x) = \ln x$, $L = \lim_{x\to A} \ln(x)$ on a,

1. $A = \infty$:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{t\to L} \frac{\ln(e^t)}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} = 0$$
2. $A = 0$:
$$\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{t\to L} e^t \ln(e^t) = \lim_{t\to-\infty} te^t = 0$$

6 Fonction réciproque

Ici on considère que $g = f^{-1}$ est la réciproque de la fonction inversible f.

6.1 Dérivée

D'après le théorème de la bijection réciproque, sous réserve que que f' ne s'annule pas :

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \tag{6}$$

7 Sources

- `https://cortex-nihilo.fr/fonction-exponentielle.html`
- `https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Cauchy-Lipschitz`