Polynôme de Tchebychev

Nils Laurent

Dans un premier temps, soit $x \in [-1, 1]$.

1 Rappels

Rappel, T_n peut s'exprimer sous deux formes :

1. On définit T_n sous la forme,

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

2. Nous avons démontré l'égalité avec la forme suivante (par récurrence),

$$T_0 = 1, \qquad T_1 = x, \quad \text{et} \quad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

Nous avons trouvé les racines x_k du polynôme, où $k \in \{0, \cdots n-1\}$:

$$x_k = \cos(\frac{2k+1}{2n}\pi)$$

qui vérifient donc,

$$T_n(x_k) = 0 \tag{1}$$

2 Étude des extremums

Pour étudier extremums de T_n, on étudie sa dérivée :

$$T_n'(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arccos(x)) \tag{2}$$

La dérivée s'annule sur les $\alpha_k = \cos(\frac{k\pi}{n})$ où $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ (en effet T_n' n'est pas définie en α_0, ce qui est cohérent avec le degré du polynôme). De plus on remarque :

$$T_n(\alpha_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k \tag{3}$$

Donc $\|T_n(x)\|_\infty = 1$.

3 Forme explicite du polynôme

Par récurrence, on peut déterminer l'expression suivante $\forall n \geq 1$:

$$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) \tag{4}$$

Démo On montre l'égalité au rang 1 :

$$T_1(x) = 2^0(x - x_0) = x - \cos(\frac{\pi}{2}) = x$$

puis au passage de n à $n+1$, en supposant l'hypothèse vérifiée au rang n.

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\ &= 2x2^{n-1}\prod_{k=0}^{n}(x - x_k) - T_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Le polynôme T_{n-1} étant de degré $n-1$, le coefficient de plus haut degré de T_n est 2^{n-1}. De plus comme on connait les racines de T_{n+1}, on en déduit :

$$T_{n+1}(x) = 2^n \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$$

4 Généralisation sur un segment quelconque

On souhaite trouver une version plus générale de T_n définie sur tout segment réel. Soit $x \in [a, b]$, on pose :

$$u(x) = \frac{2x - b - a}{b - a} \tag{5}$$

Éléments de construction on pose $f(x) = 2x - b - a$, $f(b) = b - a$, $f(a) = -f(b) = a - b$. On est donc bien centré en 0. Pour obtenir une valeur entre -1 et 1 il suffit donc de normaliser en divisant par $b - a$, d'où l'expression de la fonction u.

Déduction des racines : La fonction $u(x)$ réalise une bijection entre $[a, b]$ et $[-1, 1]$, la fonction suivante est donc bien définie :

$$\widetilde{T}_n(x) = T_n(u(x))$$

D'après l'inverse de u,

$$x = \frac{u(x)(b-a)}{2} + \frac{b+a}{2} \tag{6}$$

les racines sont donc :

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\frac{b-a}{2} + \frac{b+a}{2} \tag{7}$$

5 Borne supérieur du polynôme

Proposition On pose x_k, $k \in \{0, \cdots, n\}$ les racines du polynôme de Tchebychev $\widetilde{T}_{n+1}(x)$ défini sur $[a, b]$. On a :

$$\|\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)\|_\infty = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1} \tag{8}$$

Remarque (utile pour la démonstration) Soit $C \in \mathbb{R}_+$,

$$\|Cf(x)\|_\infty = \sup_x |Cf(x)| = C\sup_x |f(x)| = C\|f(x)\|_\infty \tag{9}$$

Démo Tout d'abord, on remarque que :

$$\|\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\|_\infty = \|\frac{\widetilde{T}_{n+1}(x)}{2^n}\|_\infty \tag{10}$$

On met en facteur les constantes :

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_{n+1}(x) =& 2^n \prod_{k=0}^{n}(x-x_k) && (11)\\
=& 2^n \prod_{k=0}^{n}\left[\frac{b-a}{2}\left(u(x)-\cos\left(\frac{2k+1}{n}\right)\right)\right] && (12)\\
=& \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} 2^n \prod_{k=0}^{n}\left(u(x)-\cos\left(\frac{2k+1}{n}\right)\right) && (13)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\|\widetilde{T}_{n+1}(x)\|_\infty = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} 2^n \left\|\prod_{k=0}^{n}\left(u(x)-\cos\left(\frac{2k+1}{n}\right)\right)\right\|_\infty \tag{14}$$

De plus, nous savons que :

$$\|T_{n+1}(x)\|_\infty = 2^n \left\|\prod_{k=0}^{n}\left(u(x)-\cos\left(\frac{2k+1}{n}\right)\right)\right\|_\infty = 1$$

D'où :

$$\left\|\prod_{k=0}^{n}\left(u(x)-\cos\left(\frac{2k+1}{n}\right)\right)\right\|_\infty = \frac{1}{2^n} \tag{15}$$

Et on peut finalement conclure que :

$$\begin{aligned}
&\|\widetilde{T}_{n+1}(x)\|_\infty = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} && (16)\\
\implies &\frac{1}{2^n}\|\widetilde{T}_{n+1}(x)\|_\infty = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1} && (17)
\end{aligned}$$