Croissance comparée des fonctions exponentielle et logarithme

Il existe des formes indéterminées qui ne peuvent pas être levées avec un développement de Taylor-Young. C'est le cas quand on étudie la limite d'une fonction aux bords de son domaine de définition. Cependant, la croissance des fonctions peut parfois être une information suffisante pour calculer la limite.

0.1 Croissance comparée de la fonction exponentielle

Proposition 1

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x > 0$, alors $e^x > x$

Démonstration On pose $f(x) = e^x - x$.

$$f(0) > 0 \text{ et } \forall x > 0, f'(x) > 0$$

Donc,

$$\forall x > 0, f(x) > 0$$

D'où $e^x > x$.

Proposition 2

1. La croissance de e^x est plus forte que x en ∞ :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$$

2. La décroissance de e^{-x} est plus forte que x en ∞ :

$$\lim_{x \to \infty} xe^{-x} = 0$$

Démonstration Soit $a \in]0, 1[$, par croissance de la limite,

$$\forall x > 0, \frac{e^x}{e^{ax}} = e^{x(1-a)} < \frac{e^x}{ax} \implies \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{ax} \leq \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$$

De manière analogue,

$$\forall x > 0, -e^{ax}e^{-x} \leq -axe^{-x} \implies 0 \leq \lim_{x \to \infty} -axe^{-x}$$

On en déduit,

$$\forall x > 0, -axe^{-x} < 0 \implies \lim_{x \to \infty} -xe^{-x} = \lim_{x \to \infty} xe^{-x} = 0$$

Proposition 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{bx}}{x^a} = \infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\infty} |x|^a e^{-bx} = 0$$

Démonstration Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, en posant $u = \frac{bx}{a}$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{bx}}{x^a} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^{\frac{b}{a}x}}{x}\right)^a = \lim_{u\to\infty} \left(\frac{e^u}{\frac{a}{b}u}\right)^a = \infty$$

De même,

$$\lim_{x\to\infty} |x|^a e^{-bx} = \lim_{x\to\infty} \left(|x| e^{-\frac{b}{a}x}\right)^a = \lim_{u\to\infty} \left(\frac{a}{b}|u|e^{-u}\right)^a = 0$$

0.2 Changement de variable dans des limites

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Proposition 4

Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $f \in C^0(]a, b[)$ strictement monotone sur $]a, b[$, alors :

$$\forall c \in [a, b], \exists L \in \overline{\mathbb{R}}, \lim_{x\to c} f(x) = L$$

De plus, la fonction f est inversible. On pose g l'inverse de f et on a,

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{t\to L} f(g(t)) = L$$

Démonstration L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Donc d'après le théorème des fonctions réciproques, comme f est strictement monotone, f est un homéomorphisme (une bijection continue d'inverse continue).

0.3 Croissance comparée du logarithme à partir de l'exponentielle

La fonction e^x est $C^\infty(\mathbb{R})$ (donc continue) et est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ donc il en est de même pour sa réciproque sur $\mathbb{R}_+^*$. Il est ainsi possible d'utiliser la proposition 4 pour calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$
2. $\lim_{x\to 0} x \ln x$

Solutions D'après proposition 4 pour $f(x) = \ln x$, $L = \lim_{x\to A} \ln(x)$ on a,

1. $A = \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{t\to L} \frac{\ln(e^t)}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

2. $A = 0$:

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{t\to L} e^t \ln(e^t) = \lim_{t\to -\infty} te^t = 0$$